פיתוח טיילור (Taylor) סופי

אם f גזירה ב אזי . פירוש הדבר הוא ש:  
כלומר ההפרש בין הפונקציה לקירוב שואף לאפס יותר מהר מאשר ההפרש בין x ל:

נניח שf גזירה n פעמים ב. נתבונן בפולינום

קוראים ל פולינום של טיילור ממעלה n ב(עבור הפונקציה f).

# משפט

אם f גזירה n פעמים ב אזי ו הוא הקירוב הפולינומי הכי טוב של f בסביבת

## למה

*משפט זלצמן: "זה בדיוק מתאים – כמו בסיפור על זהבה ושלושת הדובים."*

### הוכחה ללמה

## הוכחה(למשפט)



הוכחנו ש  
עכשיו יהי .

# משפט

אם אזי לכל

## הוכחה

שים כדי לקבל . עכשיו ידוע לנו ש:  
עבור נחלק ב כדי לקבל  
לוקחים את הגבול משני הצדדים ומקבלים . ממשיכים בצורה כזאת עד שנוכיח ש

## מסקנה

אם הינה פולינום ממעלה n אזי לכל

שכן הוכחנו ש לכל

קיימות עבור

וגם קיימת עבור

*ניקח פונקציה רציפה ב גזירה ב וכך ש וניישם משפט הערך הממוצע כדי לקבל עבור :*

*קח , :*

: – השארית לפי לגרנז'.

אם ניקח נקבל

כיוון ש ניתן לבחור

# דוגמה

. קח , אזי , שכן . לכן

## למה

אם , אזי

### הוכחה ללמה

# משפט

e הינו מספר אי-רציונלי.

## הוכחה

נסמן . נניח ש, נגיד . אזי():

לא תמיד פיתוח טיילור נותן קירוב מספיק טוב.

# דוגמה

הפונקציה גזירה אינסוף פעמים בכל נקודה ומתקיים לכל . לכן לכל ולכן